MATERIAL: FM-15

Hidrodinámica

Hasta ahora, nuestro estudio se ha restringido a condiciones de reposo, que son considerablemente más sencillas que el estudio de fluidos en movimiento. Las dificultades matemáticas a las que hay que enfrentarse cuando se intenta describir el movimiento de un fluido son formidables. La tarea se facilitará si hacemos ciertas suposiciones. Ante todo, consideremos que todos los fluidos en movimiento muestran una corriente laminar o flujo aerodinámico.

El **flujo laminar** es el movimiento de un flujo, en el cual cada partícula sigue la misma trayectoria (pasa por un punto particular) que siguió la partícula anterior. La figura 1 muestra el comportamiento de un flujo laminar.

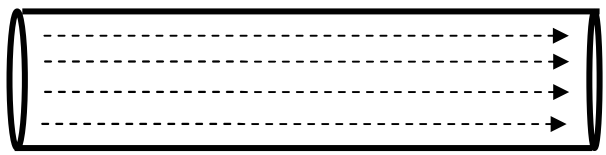
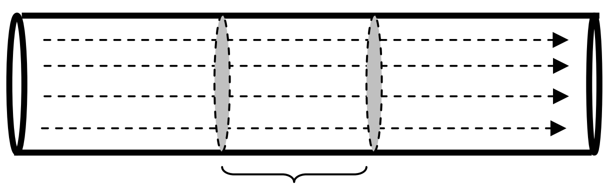


Fig. 1

Vamos a considerar, además, que los fluidos son incomprensibles y que no presentan una fricción interna apreciable. En estas condiciones, se pueden hacer algunas predicciones acerca de la velocidad de flujo a lo largo de una tubería o de otro recipiente.

Gasto o caudal (Q) se define como el volumen de fluido que pasa a través de cierta sección transversal en la unidad de tiempo.



$v \cdot t$

Fig.2

Para expresar esta relación en forma cuantitativa, consideremos el caso de un líquido que fluye a lo largo de una tubería como la que ilustra en la figura 2, con una rapidez media v, En un intervalo de tiempo t, cada partícula en la corriente se mueve a través de una distancia $v \cdot t$. El volumen V que fluye a través de la sección transversal A está dado por

$$V = A \cdot v \cdot t$$

Por lo tanto, el gasto se puede calcular partiendo de

$$Q = \frac{A \cdot v \cdot t}{t} = v \cdot A$$

Ecuación de continuidad

Si el fluido es incomprensible y no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna, el gasto Q permanecerá constante. Esto significa que una variación en la sección transversal en la tubería, como se muestra en la figura 3, da por resultado un cambio en la velocidad del líquido, de tal modo que el producto $v \cdot A$ permanece constante. Simbólicamente escribimos

$$Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Un líquido fluye con más rapidez a través de una sección estrecha de tubería y más lentamente a través de secciones más amplias. Este principio es la causa de que el agua fluya más rápido cuando las orillas de un arroyo en algunas partes más cercanas entre sí.

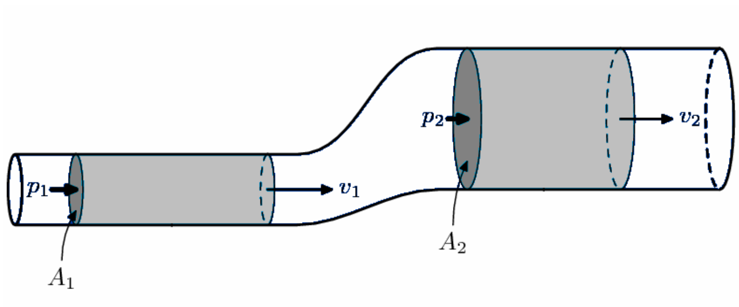


Fig. 3

Nota: la ecuación de continuidad es una expresión matemática de la conservación de la masa en un fluido.

Ejemplo:

1. La ecuación de continuidad indica que si la sección de un tubo de flujo se estrecha, entonces la velocidad del fluido

   A) aumenta.
   B) disminuye.
   C) permanece constante.
   D) primero aumentará y luego disminuirá.
   E) Ninguna de las anteriores.

Presión y Velocidad

Hemos observado que la velocidad de un fluido aumenta cuando fluye a través de un angostamiento. Un incremento en la velocidad únicamente se puede deber a la presencia de una fuerza. Para acelerar un líquido que entra a la constricción, la fuerza del empuje proveniente de la sección transversal amplia debe ser mayor que la fuerza de resistencia de la constricción. En otras palabras, la presión en los puntos A y C, en la figura 4 debe ser mayor que la presión en B. Los tubos insertados en la tubería sobre dichos puntos indican claramente la diferencia. El nivel del fluido en el tubo situado sobre la parte angosta es más bajo que el nivel en las áreas adyacentes. Si h es la diferencia de altura, la diferencia de presión está dada por $P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h$

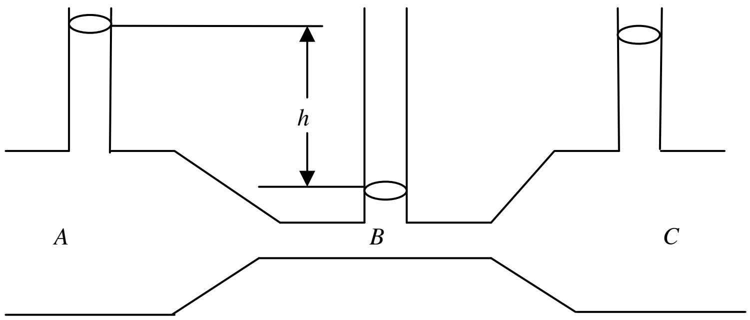


Fig. 4

Nota: lo anterior es cierto si se supone que la tubería está en posición horizontal y que no se producen cambios de presión debido al cambio de energía potencial.

Ejemplo:

2. En la parte baja de un gran tonel de agua, se conecta una cañería que tiene tres diámetros diferentes tal que $D_A > D_B > D_C$. La cañería se abre de modo que el agua escurra por ella. Podemos afirmar que

   A) $v_{A>}$ $v_B > v_C$
   B) $P_A > P_B > P_C$
   C) $P_A < P_B < P_C$
   D) la presión es la misma en las tres partes
   E) Ninguna de las anteriores.

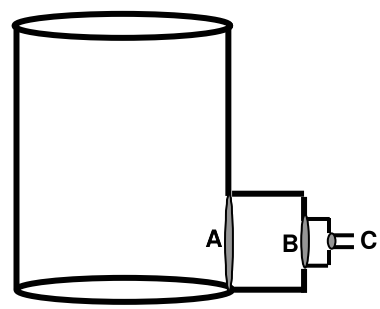


Fig.5

Ecuación de Bernoulli

En nuestro estudio sobre fluidos, hemos destacado cuatro parámetros: la presión P, la densidad ρ, la rapidez v y la altura h, sobre algún nivel de referencia. El primero en establecer la relación entre estas cantidades y su capacidad para describir fluidos en movimiento fue el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700 – 1782). Cuando fluye el fluido por un tubo de sección transversal no uniforme y de un nivel a otro, por la ecuación hidrostática, la presión cambia a lo largo del tubo (figura 6). La fuerza de la presión P_1 en el extremo inferior del tubo de área A_1 es $F_1 = P_1 \cdot A_1$. El trabajo realizado por esta fuerza sobre el fluido es

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta X_1 = P_1 \cdot \Delta V$$

donde ΔV es el volumen de fluido considerado. De manera equivalente en el nivel superior, si se considera un mismo intervalo de tiempo, el volumen ΔV del fluido que cruza la sección superior de área A_2 es el mismo, entonces el trabajo es

$$W_2 = -P_2 \cdot \Delta V$$

El trabajo neto realizado por las fuerzas en el intervalo de tiempo Δt es:

$$W = W_1 + W_2 = (P_2 - P_1)\Delta V$$

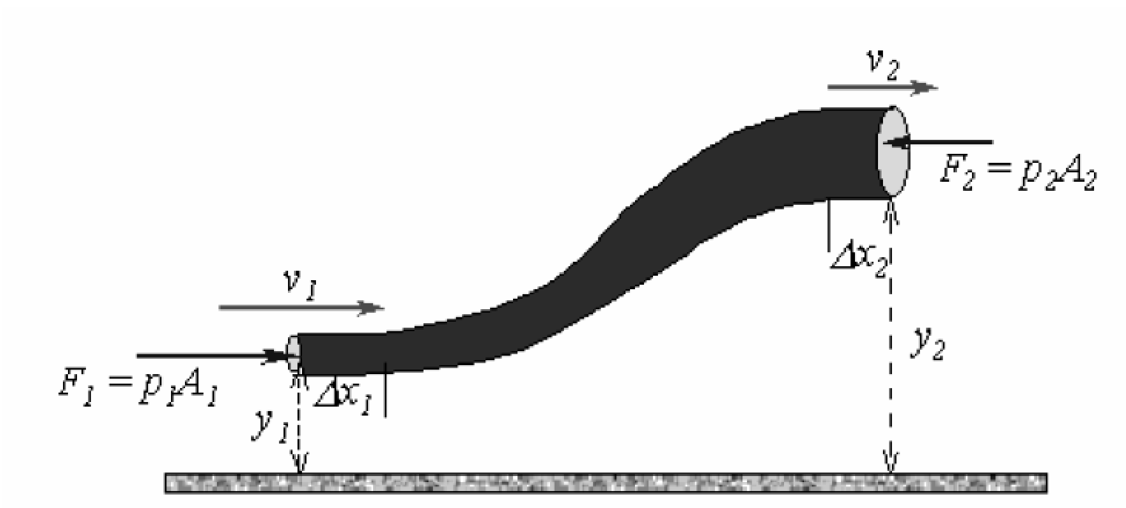


Fig.6

Parte de este trabajo se usa en cambiar tanto la energía cinética como la energía potencial gravitacional del fluido. Si m es la masa que pasa por el tubo de corriente en el tiempo Δt, entonces la variación de energía cinética es:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1)^2$$

y la variación de energía potencial gravitacional es:

$$\Delta E_P = m \cdot g \cdot y_2 - m \cdot g \cdot y_1$$

Por el teorema del trabajo y energía se tiene:

$$W = \Delta E_C + \Delta E_P$$

de donde obtenemos

$$(P_2 - P_1) \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1)^2 + m \cdot g \cdot y_2 - m \cdot g \cdot y_1$$

Dividiendo por ΔV y como $\rho = m/\Delta V$, se obtiene la ecuación de Bernoulli para un fluido no viscoso e incompresible.

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1)^2 + \rho \cdot g \cdot y_2 - \rho \cdot g \cdot y_1$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1)^2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2)^2 + \rho \cdot g \cdot y_2$$

En vista de que los que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera, la ecuación de Bernoulli se puede enunciar en una forma más simple como

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot y = \text{constante}$$

La ecuación de Bernoulli encuentra aplicación en casi todos los aspectos de flujo de fluidos. La presión P debe reconocerse como la absoluta y no la presión manométrica. Recuerde que ρ es la densidad y no el peso específico del fluido. Observe que las unidades de cada término de la ecuación de Bernoulli son unidades de presión.

Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli

En gran número de situaciones físicas, la velocidad, la altura o la presión de un fluido son constantes. En tales casos, la ecuación de Bernoulli adquiere una forma simple. Por ejemplo, cuando un líquido es estacionario, tanto v_1 como v_2 valen cero. La ecuación de Bernoulli nos mostrará que la diferencia de presión es

$$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

Esta ecuación es idéntica a la relación estudiada para fluidos en reposo.

Nota: en la ecuación la variable $y = h$

Otro resultado importante se presenta cuando no hay cambio en la presión ($P_1 = P_2$). En la figura 7 un líquido sale de un orificio situado cerca del fondo de un tanque abierto. Su rapidez cuando sale del orificio puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli. Debemos suponer que el nivel del líquido en el tanque desciende lentamente en comparación con la velocidad de salida, de tal modo que la velocidad v_2 en la parte superior puede considerarse cero. Además, debe tomarse en cuenta que la presión del líquido tanto en la parte superior como en el orificio es igual a la presión atmosférica. Entonces, $P_1 = P_2$ y $v_2 = 0$, lo que reduce la ecuación de Bernoulli a

$$\rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1)^2 = \rho \cdot g \cdot h_2$$

O bien

$$(v_1)^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2 \cdot g \cdot h$$

Esta relación se conoce como teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h}}$$

Note que la rapidez de salida de un líquido a la profundidad h es la misma que la que de un objeto que se dejara caer del reposo desde una altura h. La relación de Torricelli nos permite expresar el gasto en términos de la altura del líquido sobre el orificio. O sea,

$$Q = v \cdot A = A\sqrt{2gh}$$

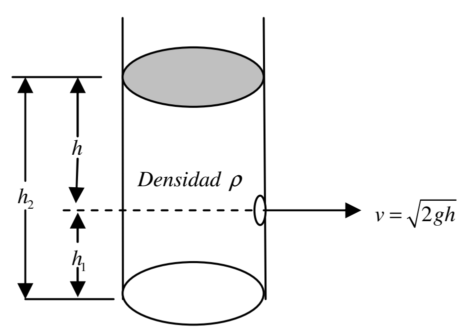


Fig. 7

Un Ejemplo interesante para demostrar el principio de Torricelli se muestra en la figura 8. La velocidad de descarga aumenta con la profundidad. El alcance máximo se logra cuando la abertura se encuentra en la mitad de la columna de agua. Aunque la velocidad de descarga aumenta por debajo del punto medio, el agua golpea el piso más cerca. Esto ocurre porque llega al piso más pronto. Las perforaciones equidistantes por encima y por abajo del punto medio tendrán el mismo alcance horizontal.

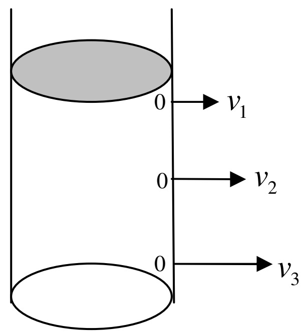


Fig. 8

En conclusión la velocidad de descarga aumenta con la profundidad por debajo de la superficie, pero el alcance es máximo en el punto medio.

Ejemplos:

3. El teorema de Bernoulli es esencialmente la aplicación de la conservación de la........................ en los fluidos.

   A) energía cinética.
   B) energía potencial.
   C) energía mecánica.
   D) cantidad de movimiento.
   E) presión y densidad.

4. Por una tubería horizontal circula un caudal constante de 10 m^3/s de agua. ¿Cuál es la diferencia de presión entre la entrada (*E*) y la salida (*S*)?

   A) $50x10^3$ Pa
   B) 50 Pa
   C) $12,5x10^3$ Pa
   D) $37,5x10^3$ Pa
   E) Ninguna de las anteriores.

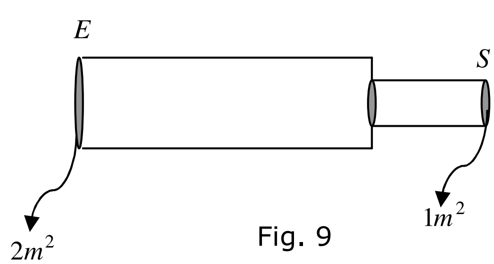


Fig. 9

PROBLEMAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

Para los problemas, use $|\vec{g}| = 10 \, {}^{m}\!/_{s^2}$

1. Con respecto a los fluidos la **ecuación de continuidad,** es la expresión matemática de la conservación de la

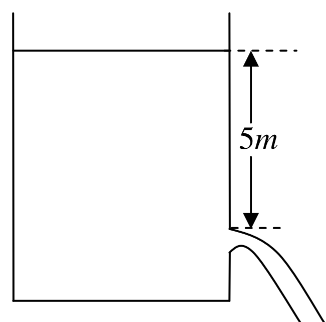
   A) masa total del fluido.
   B) energía mecánica del fluido.
   C) velocidad del fluido.
   D) densidad del fluido.
   E) energía cinética del fluido.

2. Se dice que el movimiento de un fluido es de **régimen estacionario**, cuando, la velocidad en un punto del espacio cualquiera .... con el tiempo.

   A) aumenta
   B) no varía
   C) disminuye
   D) primero aumenta y luego disminuye
   E) primero disminuye y luego aumenta

3. En un estanque de agua, abierto a la presión atmosférica, se hace un pequeño orificio sobre una pared lateral como se muestra en la siguiente figura, a una profundidad de 5m. ¿Cuál es la rapidez de salida del agua?

   A) 5 m/s
   B) 10 m/s
   C) 100 m/s
   D) $\sqrt{5}$ m/s
   E) $\sqrt{10}$ m/s



$Fig. 10$

4. El agua del canal El Carmen entra al Cerro San Cristóbal por un túnel circular de radio 2m, con una velocidad de 5 m/s. Si el radio del túnel se reduce a 1 m para la salida del agua, entonces ésta sale con una rapidez de

   A) 5 m/s
   B) 10 m/s
   C) 15 m/s
   D) 20 m/s
   E) 25 m/s

5. Por una manguera horizontal de área transversal A circula agua a una presión de 1000Pa, con una rapidez de 0.1 m/s. Luego el área de la manguera disminuye a la mitad. Si el fluido no es viscoso e incompresible, ¿Cuál es el valor de la presión en dicha sección de la manguera?

   A) 2000 Pa
   B) 1050 Pa
   C) 985 Pa
   D) 945 Pa
   E) 500 Pa

6. "Si la sección de un tubo de flujo se estrecha, entonces la velocidad del fluido aumenta" corresponde a una indicación

   A) del Principio de Pascal.
   B) del Teorema de Bernoulli.
   C) del Principio de Arquímides.
   D) del Teorema de Torricelli.
   E) de la Ecuación de Continuidad.

7. En una cañería horizontal fluye agua con una rapidez de 4 m/s y una presión de $74000 N/m^2$. Si la cañería se estrecha a la mitad de su sección original, entonces ahora, el agua fluye con una presión de

   A) $25000 N/m^2$
   B) $37000 N/m^2$
   C) $50000 N/m^2$
   D) $74000 N/m^2$
   E) $148000 N/m^2$

8. Cuando un avión se encuentra volando, debido al diseño de las alas, las líneas de corriente se comprimen por encima del ala y se espacian por debajo de ella. Debido a esto

   I) el flujo de aire tiene mayor velocidad encima del ala que debajo de ella.
   II) la presión es menor encima del ala, que debajo de ella.
   III) hay un empuje dinámico hacia arriba llamado resistencia del aire.

   De estas afirmaciones es (son) verdadera (s)

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo I y II
   D) Sólo I y III
   E) I, II y III

9. Si fluye agua con una rapidez de 4 m/s por un tubo de sección igual a 30 cm^2 y luego este tubo se ramifica en tres tubitos de sección 4 cm^2, entonces el agua fluirá por cada tubito con un rapidez de

   A) 7,5 m/s
   B) 20 m/s
   C) 15 m/s
   D) 16 m/s
   E) Ninguna de las anteriores

10. Por una manguera sale un caudal de agua equivalente a 0.01 m^3/s. ¿Cuánto tiempo demora en llenar un balde de 2000 litros?

   A) 100 s
   B) 200 s
   C) 300 s
   D) 400 s
   E) 500 s

Solución ejemplo 1

La ecuación de continuidad indica que el caudal permanece constante, lo que implica que a menor sección transversal, la velocidad del fluido aumenta.

La alternativa correcta es A

Solución ejemplo 2

La solución es sencilla, ya que a mayor rapidez de un fluido que pasa por una sección transversal existe una menor presión. Por lo tanto

$$v_A < v_B < v_C \Rightarrow P_A > P_B > P_C$$

La alternativa correcta es B

Solución ejemplo 3

La ecuación de Bernoulli expresa que en un fluido perfecto (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido.

La alternativa correcta es C

Solución ejemplo 4

Mediante la ecuación del caudal, calculamos la rapidez en la entrada y en la salida.

$$v_S = \frac{10}{2} = 5\frac{m}{s} \quad \text{y} \quad v_S = \frac{10}{1} = 10\frac{m}{s}$$

Luego utilizando la ecuación de Bernoulli

$$P_E + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot(v_E)^2 + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_S + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot(v_S)^2 + \rho\cdot g\cdot h_2$$

como el tubo es horizontal implica que $h_1 = h_2$, entonces

$$P_E - P_S = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left[(v_S)^2 - (v_E)^2\right] = 37500 Pa$$

La alternativa correcta es D

DSIFM15

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web.
http://clases.e-pedrodevaldivia.cl/